

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Прикладная математика и информатика

Динамические системы, эволюционные уравнения, экстремальные задачи  
и математическая кибернетика

Капитонова Елизавета Игоревна

# Исследование дискретного управления системой Дуффинга

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
д. т. н., профессор Фрадков А. Л.

Рецензент:  
к. т. н. Томчин Д. А.

Санкт-Петербург  
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Applied Mathematics and Informatics  
Dynamical Systems, Evolutionary Equations, Extremal Problem and  
Mathematical Cybernetics

Elizaveta Kapitonova

# Analysis of sampled-data control for Duffing system

Master's Thesis

Scientific supervisor:  
professor Alexander Fradkov

Reviewer:  
researcher Dmitry Tomchin

Saint-Petersburg  
2017

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Уравнение Дуффинга</b>	<b>5</b>
<b>2. Постановка задачи</b>	<b>8</b>
<b>3. Известные результаты о синхронизации с помощью непрерывного управления</b>	<b>10</b>
<b>4. Основные результаты</b>	<b>15</b>
4.1. Оценка решения системы Дуффинга с непрерывным управлением и возмущением . . . . .	15
4.2. Оценка решения системы Дуффинга с дискретным управлением . . . . .	18
<b>5. Результаты моделирования</b>	<b>23</b>
5.1. Моделирование системы Дуффинга с непрерывным управлением . . . . .	23
5.2. Моделирование системы Дуффинга с дискретным управлением . . . . .	24
<b>Заключение</b>	<b>29</b>
<b>Приложение</b>	<b>30</b>
<b>Список литературы</b>	<b>34</b>

# Введение

В представленной работе основным объектом изучения является дифференциальное уравнение второго порядка, называемое уравнением Дуффинга и описывающее широкий спектр физических систем, а также демонстрирующее хаотическое поведение. Исследуется задача синхронизации этого уравнения с некоторой эталонной моделью посредством управления. Ранее уже было предложено непрерывное управление, решающее эту задачу. Тем не менее, в наши дни управление обычно осуществляется с помощью компьютера, таким образом, важно показать, что дискретное управление также приводит к достижению поставленной цели.

Итак, в работе рассмотрены уже существующие результаты о непрерывном управлении системой Дуффинга. На их основе проведено исследование предельного поведения траектории ошибки синхронизации для системы с добавленным возмущением и под действием непрерывного управления. С использованием этого результата проводится анализ поведения ошибки для системы с аналогичным, но дискретизированным управлением. Доказывается, что при достаточно малом шаге дискретизации предельное поведение траектории ошибки будет столь угодно близким к предельному поведению ошибки для системы с непрерывным управлением. Также представлено моделирование траекторий данных систем в MATLAB.

# 1. Уравнение Дуффинга

Уравнение Дуффинга получило свое название от имени немецкого инженера и изобретателя Георга Дуффинга (1861 - 1944). В 1918 году в своей книге [2] он описал несколько линейных и нелинейных колебательных систем, некоторые из которых затем и получили его имя. Эта работа Дуффинга породила множество исследований, основывающихся на ней. С 1960-ых годов и до нашего времени растет число публикаций так или иначе упоминающих Дуффинга в названии [5]. Это число начало существенно увеличиваться, когда уравнение Дуффинга начали рассматривать как модель для различных систем.

В 1950 году в книге [6] уравнение Дуффинга уже рассматривалось наряду с уравнением Ван дер Поля, как классическое уравнение нелинейных колебаний. В 1987 году вышла значимая для всей истории изучения этой области работа Yoshisuke Ueda [7]. В ней обсуждалось хаотическое поведение кубического уравнения Дуффинга. Также в 1979 году появилась статья [4], посвященная изучению нелинейного осциллятора Дуффинга в контексте его бифуркационного поведения. Стоит отметить, что наибольшее число упоминаний слова «Дуффинг» в заголовке принадлежит инженерным статьям (40%), затем идут физические (25%), и только затем работы по математике (19%) [5].

Разные формы уравнения Дуффинга могут быть использованы для описания различных нелинейных систем. Большинство физических систем не могут быть абсолютно точно описаны таким образом, однако зачастую уравнение Дуффинга используется для приближенного описания с целью изучения поведения систем. Рассмотрим некоторые подобные примеры.

Нелинейность в механической системе, причиной которой является жесткость, можно описать уравнением Дуффинга. В нашем случае жесткость — координатная функция. Приложенная к пружине сила  $F_s$  и перемещение  $y$  связаны нелинейно:

$$F_s = k_1 y \pm k_3 y^3. \quad (1)$$

Если обозначить длину пружины за  $l$ , то можно переписать уравнение в виде

$$\tilde{F}_s = \tilde{y} \pm \gamma \tilde{y}^3.$$

Здесь  $\tilde{F}_s = F_s/k_1 l$ ,  $\tilde{y} = y/l$ ,  $\gamma = k_3 l^2/k_1$ . Жесткость системы можно получить проинтегрировав уравнение (1):

$$dF_s/dy = k_1 \pm 3k_3 y^2.$$

Также можно переписать уравнение (1) на  $F_s = k_1 y \pm k_2 y^2 \pm k_3 y^3$ , которое в свою очередь может быть представлено в виде

$$\tilde{F}_s = \tilde{y} \pm \beta \tilde{y}^2 \pm \gamma \tilde{y}^3,$$

где  $\beta = k_2 l/k_1$  — нелинейный коэффициент жесткости.

Также важным примером является маятник. Ему посвящена значительная часть книги самого Дуффинга. Угловое отклонение маятника описывается уравнением

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin \theta = M \cos(\omega t).$$

$l$  — длина маятника,  $g$  — ускорение свободного падения,  $M$  — амплитуда. Угловое смещение можно приблизить:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Возьмем это приближение до третьей степени и подставим в исходное равенство.

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \left( \theta - \frac{1}{6} \theta^3 \right) = M \cos(\omega t).$$

Обозначим  $\omega_n = \sqrt{g/l}$ ,  $\Omega = \omega/\omega_n$ ,  $\tilde{t} = \omega_n t$ ,  $\tilde{M} = M/(ml^2 \omega_n^2)$ . Уравнение примет следующий вид:

$$\ddot{\theta} + \theta - \frac{1}{6} \theta^3 = \tilde{M} \cos(\Omega \tilde{t}).$$

Стоит также упомянуть такие примеры как геометрическая нелинейность в системе с двумя линейными пружинами и грузом, нели-

нейность в системе с балкой и двумя магнитами, нелинейный изолятор, отклонение балки с нелинейной жесткостью, нелинейная электрическая схема, состоящая из нелинейного индуктора и линейного конденсатора и другие.

Таким образом, с помощью рассматриваемого в работе уравнения Дуффинга может быть описано множество разнообразных систем. При этом могут быть использованы разные формы этого уравнения, однако стоит заметить, что коэффициенты полученных в итоге уравнений обозначают весьма разные физические свойства описываемых систем.

## 2. Постановка задачи

Исследуется возможность синхронизации непрерывной системы Дуффинга с некоторой непрерывной эталонной системой. Ранее в статье [1] было доказано, что с помощью определенного непрерывного управления можно синхронизировать указанные системы. Найдем условия, при которых дискретизация непрерывного уравнения тоже решает поставленную задачу.

Будем рассматривать следующую форму уравнения Дуффинга:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + p_1x + x^3 = q \cos(\omega t),$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$  — вектор состояний,  $p > 0$ ,  $p_1$  и  $\omega$  — параметры,  $t$  — время,  $q$  — неизвестный параметр.

Известно, что при  $p > 0$  траектории уравнения равномерно ограничены по  $t$ , а также что при разных параметрах уравнение демонстрирует разную динамику [1], [3]. Например, рассмотрим набор параметров  $p = 0.4$ ,  $p_1 = -1.1$ ,  $\omega = 1.8$ . При  $q = 1.8$  будет наблюдаться хаотическое поведение, а при  $q = 0.62$  — периодическое. Далее задача синхронизации будет рассматриваться для хаотического уравнения Дуффинга.

Представим управление как аддитивный сигнал в правой части уравнения. Обозначим  $x_1 = x$ ,  $\dot{x}_1 = x_2$ . Уравнение Дуффинга примет вид системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -p_1x_1 - x_1^3 - px_2 + q \cos(\omega t) + u(t) + f(t), \end{cases} \quad (2)$$

где  $u(t) \in \mathbb{R}^1$  — вектор управления,  $f(t) \in \mathbb{R}^1$  — кусочно-непрерывная функция возмущения такая, что  $|f(t)| \leq \Delta_f$  для любого  $t$ .

Эталонная модель, к которой хотим с помощью управления привести (2) (структурное отличие в параметре  $q_m$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m} = x_{2m} \\ \dot{x}_{2m} = -p_1x_{1m} - x_{1m}^3 - px_{2m} + q_m \cos(\omega t). \end{cases} \quad (3)$$



Здесь  $x_m \in \mathbb{R}^2$  — вектор состояний,  $q_m$  — параметр.

Цель управления:  $\|x_1(t) - x_{1m}(t)\| \rightarrow 0$ ,  $\|x_2(t) - x_{2m}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В таком случае поведения управляемой модели и эталонной будут совпадать.

Рассмотрим разность систем (2) и (3):

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -p_1 e_1 - e_1^3 - p e_2 + (q - q_m) \cos(\omega t) - 3x_1 x_{1m} e_1 + u(t) + f(t), \end{cases} \quad (4)$$

где  $e_1(t) = x_1(t) - x_{1m}(t)$ ,  $e_2(t) = x_2(t) - x_{2m}(t)$  и управление

$$u(t) = -K e_1(t) + 3x_1(t)x_{1m}(t)e_1(t) + (q_m - q) \cos(\omega t)$$

предложено в [1]. Разность (4) будем называть уравнением ошибки.

Далее будем рассматривать уже имеющиеся результаты для данной задачи и изучать поведение системы (4) с разными вариантами управления  $u$ .

### 3. Известные результаты о синхронизации с помощью непрерывного управления

Остановимся подробнее на вспомогательном результате, который получен в статье [1] для системы (4). Задача синхронизации может быть поставлена как задача адаптивного управления. Определим эту задачу.

Пусть управляемая система зависит от некоего вектора неизвестных параметров. Суть задачи адаптивного управления заключается в поиске такого управления, которое достигало бы цели при всех возможных значениях неизвестных параметров. Пусть рассматриваемая система обладает конечной размерностью пространства состояний и конечным числом неизвестных параметров.

**Определение 1.** Дана система

$$\dot{x} = G(x, u, t, \xi), \quad (5)$$

$$y = H(x, u, t, \xi), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояний,  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор управления,  $y \in \mathbb{R}^l$  — вектор измерений,  $\xi \in \mathbb{R}^p$  — вектор неизвестных параметров.

Пусть цель управления задана следующим образом:

$$Q_t \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Здесь  $Q_t = Q_t[x(s), u(s), \xi; 0 \leq s \leq t]$  — целевая функция. Проблемой адаптивного управления называется задача нахождения двухуровневого алгоритма управления

$$u(t) = U_t[y(s), u(s), \theta(s); 0 \leq s < t], \quad (8)$$

$$\theta(t) = \Theta_t[y(s), u(s), \theta(s); 0 \leq s < t], \quad (9)$$

такого, что цель управления будет достигнута. Здесь  $\theta(t) \in \mathbb{R}^k$  — вектор настраиваемых параметров.

Такое управление строится в два этапа: на первом строим управление в предположении, что все параметры системы известны (получается главный алгоритм управления (8)). На втором этапе все неизвестные параметры главного алгоритма управления (8) заменяем на настраиваемые параметры. Полученный адаптивный алгоритм управления (9) обеспечит достижение цели управления. Построить такой алгоритм нам поможет метод скоростного градиента [8], [9].

Пусть мы уже получили управление (8). Подставим его в (5) и получим систему с входом  $\theta$  (опустим здесь  $\xi$ )

$$\dot{x} = F(x, \theta, t). \quad (10)$$

Будем рассматривать случай, когда целевая функция  $Q_t = Q(x(t), t)$  является функционалом,  $Q(x(t), t)$  — скалярная гладкая неотрицательная функция. Тогда можем описать скалярной функцией  $\omega(x, \theta, t)$  скорость изменения  $Q_t$  вдоль траектории полученной выше системы:

$$\omega(x, \theta, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + F^T(x, \theta, t) \nabla_x Q(x, t).$$

Метод скоростного градиента заключается в том, что мы будем менять вход  $\theta$  вдоль градиента скорости  $\omega(x, \theta, t)$  по  $\theta$ . В общем виде алгоритм будет выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}(\theta + \psi(x, t)) = -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t). \quad (11)$$

Здесь  $\psi$  — вектор-функция такая, что  $\psi^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) \geq 0$ , а  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  — неотрицательно определенная матрица размерности  $k \times k$ . Уравнение (11) также может быть представлено в таком виде:

$$\theta = -\psi(x, t) - \Gamma \int_0^t \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, s) ds. \quad (12)$$

Рассмотрим доказанную в работе [1] теорему:

**Теорема 1.** Пусть для систем (10), (11) выполнены следующие условия:

1.  $F(x, \theta, t)$ ,  $\nabla_{\theta}\omega(x, \theta, t)$  и все их частные производные ограничены на любом ограниченном множестве состояний  $(x, \theta)$  систем (10), (11), а также равномерно ограничены на  $t \geq 0$ .
2.  $\omega(x, \theta, t)$  выпуклая по  $\theta$  функция.
3. Существуют  $\theta_* \in \mathbb{R}^k$  и  $\rho(x)$ , для которых при всех  $x \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство  $\omega(x, \theta_*, t) \leq -\rho(x)$ . Здесь  $\rho(x)$  равномерно непрерывна на любом ограниченном множестве,  $\rho(x) \geq 0$  и  $\rho(0) = 0$ .
4. Если  $Q_t(x(t), t)$  ограничен, то и  $x(t)$  ограничен.

Тогда все траектории  $(x(t), \theta(t))$  систем (10), (11) ограничены, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t)) = 0.$$

Для достижения цели управления мы можем следовать следующему алгоритму:

1. Поставим цель управления в виде (7). Выберем некоторым образом целевую функцию  $Q_t$  (на этом этапе выбор может еще быть не окончательным).
2. Предположим, что все параметры системы  $\xi$  известны. Найдем главный алгоритм управления  $u = U(y, \xi, t)$ . При этом чтобы достигалась цель управления (7) необходимо, чтобы выполнялось условие 3 из теоремы.
3. Подставим в главный алгоритм управления  $u$  вместо неизвестных параметров вектор настраиваемых параметров  $\theta$ . Получим  $u = U(y, \theta, t)$ .
4. Находим (10) и проверяем выполнение условий 1, 2 и 4 из теоремы.

Применим теперь метод скоростного градиента к системе Дуффинга и рассмотрим ее с точки зрения задачи адаптивного управления. Итак, у нас есть уравнение Дуффинга в виде

$$\ddot{x} + p\dot{x} + p_1x + x^3 = q \cos(\omega t).$$

$p > 0$ , а  $q$  — неизвестный параметр. Рассмотрим систему (4). Предположим теперь, что параметр  $q$  известен, и выберем главный алгоритмом управления (8):

$$u(t) = -Ke_1(t) + 3x_1(t)x_{1m}(t)e_1(t) + (q_m - q) \cos(\omega t).$$

Для достижения цели управления будем возьмем в качестве функции Ляпунова

$$V(e) = \frac{1}{2} \left( (K + p_1)e_1^2 + \frac{1}{2}e_1^4 + e_2^2 \right).$$

Для  $K > -p_1$  она будет положительно определенной.

$$\dot{V}(e) = (K + p_1)e_1e_2 + e_1^3e_2 - p_1e_1e_2 - e_1^3e_2 - pe_2^2 - Ke_1e_2 = -pe_2^2 \leq 0.$$

Выберем в качестве целевой функции  $Q(e)$  функцию Ляпунова:  $Q(e) = V(e)$ . Тогда, если положить  $\rho(e) = pe_2^2$ , будет выполнено условие 3 из теоремы.

Теперь вернемся к тому, что параметр  $q$  неизвестен. Подставим вместо него вектор настраиваемых параметров  $\theta$ . Главный алгоритм управления:

$$u(t) = -Ke_1(t) + 3x_1(t)x_{1m}(t)e_1(t) + \theta \cos(\omega t). \quad (13)$$

Посчитаем скорость изменения  $Q(e)$  вдоль траекторий системы.

$$\dot{Q}(e) = e_2(q + \theta - q_m) \cos(\omega t) - pe_2^2.$$

$$\nabla_{\theta} \dot{Q} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \theta} = e_2 \cos(\omega t).$$

Также выберем функцию  $\psi(e, t) = \lambda \nabla_{\theta} \dot{Q} = \lambda e_2 \cos(\omega t)$ , где  $\lambda > 0$ . Запишем алгоритм скоростного градиента в форме (12),  $\gamma > 0$ .

$$\theta = -\lambda e_2 \cos(\omega t) - \gamma \int_0^t e_2 \cos(\omega s) ds. \quad (14)$$

Теперь проверим выполнение условий теоремы для главного алгоритма управления (13) и адаптивного управления (14). Правые части системы (4), управлений (13) и (14) являются гладкими и линейными по  $\theta$ , а значит выполняются условия теоремы 1 и 2. Для  $\theta_* = q_m - q$  имеем

$\dot{Q}(e) = -\rho(e)$ ,  $\rho(e) = -pe_2^2 \geq 0$ . Из этого следует, что условие 3 из теоремы также выполнено. Выполнение условия 4 следует из выбранной  $Q(e)$  и ограниченности траекторий эталонной модели (3).

Условия теоремы выполнены, а значит имеет место ограниченность траекторий (3), (4), (13), (14), а также  $\rho(e(t)) = pe_2^2(t) \rightarrow 0$ . А значит и  $e_1(t) \rightarrow 0$ . То есть цель управления достигнута и доказано, что представленное адаптивное управление решает задачу синхронизации для системы с неизвестным параметром. На основе этого результата будет построено дальнейшее изучение системы Дуффинга.

## 4. Основные результаты

Результаты [1], показанные в предыдущем разделе, применим к исследованию системы Дуффинга с дискретным управлением. Покажем сперва оценку для решения системы (4) с непрерывным управлением и возмущением (в предыдущем разделе рассматривалась система без возмущения). Затем рассмотрим, насколько отличается такая оценка от оценки для системы с дискретным управлением.

### 4.1. Оценка решения системы Дуффинга с непрерывным управлением и возмущением

Рассмотрим две системы вида (4): с непрерывным управлением

$$\dot{e}(t) = A(e(t), t) + u(t). \quad (15)$$

Здесь  $u(t) = -Ke_1(t) + 3x_1(t)x_{1m}(t)e_1(t) + (q_m - q)\cos(\omega t)$ . А также рассмотрим систему с дискретным управлением

$$\dot{e}(t) = A(e(t), t) + u(t_k). \quad (16)$$

Здесь  $u(t_k) = u(t) = -Ke_1(t_k) + 3x_1(t_k)x_{1m}(t_k)e_1(t_k) + (q_m - q)\cos(\omega t_k)$ . где  $t_k = k\Delta t_k$  —  $k$ -ый момент времени,  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  — шаг дискретизации,  $t_k \leq t < t_{k+1}$  и  $k = 0, 1, \dots$ . Предметом основного изучения будет система (16). Будет рассмотрена разница результатов синхронизации с помощью этих видов управления, то есть разница в поведении траекторий (15) и (16).

Рассмотрим функцию Ляпунова для системы (15) [1], упомянутую в предыдущей части.

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} \left( (K + p_1)e_1^2(t) + \frac{1}{2}e_1^4(t) + e_2^2(t) \right). \quad (17)$$

$$\dot{V}(e(t)) = -pe_2^2(t) + f(t)e_2(t).$$

**Утверждение 1.** Для любых положительных  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  таких, что

$$\alpha_1 > 2p, \quad \alpha_0 > \frac{\Delta_f^2}{2p\alpha_1}$$

, выполняется неравенство

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\alpha_1 V(e(t)) + \alpha_0. \quad (18)$$

*Доказательство.* Докажем, что существуют  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  такие, что

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\alpha_1 V(e(t)) + \alpha_0.$$

Подставив (17) получаем, что требуется доказать, что

$$\frac{\alpha_1}{2} (K + p_1) e_1^2(t) + \frac{\alpha_1}{4} e_1^4 + \left( \frac{\alpha_1}{2} - p \right) e_2^2(t) + f(t) e_2(t) \leq \alpha_0. \quad (19)$$

Обозначим  $H(e_1(t), e_2(t)) = \alpha_1(K + p_1)e_1^2(t)/2 + \alpha_1 e_1^4(t)/4 + (\alpha_1/2 - p)e_2^2(t) + f(t)e_2(t)$ . Найдем максимум этой функции  $H$ .

$$\frac{\partial H}{\partial e_1} = \alpha_1(K + p_1)e_1 + \alpha_1 e_1^3,$$

$$\frac{\partial H}{\partial e_2} = (\alpha_1 - 2p)e_2 + f(t).$$

Решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial e_1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial e_2} = 0, \end{cases}$$

являются точки  $M_0 = (0, f(t)/(2p - \alpha_1))$  и  $M_1 = \left( \sqrt{-(K + p_1)}, f(t)/(2p - \alpha_1) \right)$ ,  $M_2 = \left( -\sqrt{-(K + p_1)}, f(t)/(2p - \alpha_1) \right)$ .  $M_1$  и  $M_2$  существуют только при  $K \geq -p_1$ . Посчитаем вторые производные  $H$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial e_1^2} = \alpha_1(K + p_1) + 3\alpha_1 e_1^2,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial e_1 \partial e_2} = 0,$$



$$\frac{\partial^2 H}{\partial e_2^2} = \alpha_1 - 2p.$$

1. В точках  $M_1$  и  $M_2$ :

$$A = \frac{\partial^2 H}{\partial e_1^2}(M_1) = -2\alpha_1(K + p_1) \geq 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 H}{\partial e_1 \partial e_2}(M_1) = 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 H}{\partial e_2^2}(M_1) = \alpha_1 - 2p.$$

$AC = -2\alpha_1(K + p_1)(\alpha_1 - 2p)$ . Пусть  $\alpha_1 > 2p$ , тогда  $AC > 0$ , и в точке  $M_1$  есть экстремум. Но так как  $A \geq 0$ , то  $M_1$ , а также  $M_2$  — точки минимума.

2. В точке  $M_0$ :

$$A = \frac{\partial^2 H}{\partial e_1^2}(M_0) = \alpha_1(K + p_1) < 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 H}{\partial e_1 \partial e_2}(M_0) = 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 H}{\partial e_2^2}(M_0) = \alpha_1 - 2p.$$

$AC = \alpha_1(K + p_1)(\alpha_1 - 2p)$ . Возьмем  $\alpha_1 > 2p$ , получим, что  $AC > 0$ , а так как  $A < 0$ ,  $M_0$  — точка максимума.

Рассмотрим значение  $H$  в точке  $M_0 = \left(0, \frac{f(t)}{2p-\alpha_1}\right)$ :

$$H(M_0) = \frac{f^2(t)}{2p\alpha_1}.$$

При этом  $|f(t)| \leq \Delta_f$ . Подставляя в (19), получаем, что  $\Delta_f^2/2p\alpha_1 \leq \alpha_0$ .

Таким образом, получили, что неравенство (18) выполняется при любых

$$\alpha_1 > 2p, \alpha_0 > \frac{\Delta_f^2}{2p\alpha_1}.$$

□

Сделаем замену в полученном неравенстве  $\dot{V}(e(t)) \leq -\alpha_0 V(e(t)) + \alpha_1$ . Положим  $V_1(e(t)) = V(e(t)) - \alpha_1/\alpha_0$ . Тогда

$$\dot{V}_1(e(t)) \leq -\alpha_0 V_1(e(t)).$$

Проинтегрируем неравенство  $\dot{V}_1/V_1 \leq -\alpha_0$  и получим

$$V_1 \leq e^{-\alpha_0 t} C,$$

где  $C$  — некоторая константа. Переходя к  $V$  и учитывая, что  $e^{-\alpha_0 t}$  достигает наибольшего значения в нуле, получаем, что  $V(e(t)) \leq \alpha_1/\alpha_0 + e^{-\alpha_0 t} C$ , что в пределе по  $t \rightarrow \infty$

$$V(e(t)) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Рассмотрим  $V(e(t)) > \alpha_1/\alpha_0$ . Подставим это неравенство в (18). Получим, что при таких  $V$  верно, что  $\dot{V}(e(t)) < 0$ . Из определения  $f(t)$  и того, что  $\dot{V}(e(t)) = -pe_2^2(t) + f(t)e_2(t) \leq -pe_2^2(t) + \Delta_f e_2(t)$ , получим также, что  $\dot{V}(e(t)) < 0$  при  $e_2(t) < 0$  и  $e_2(t) > \Delta_1$ , где  $\Delta_1 = \Delta_f/p$ .

Обозначим за  $D$  область  $D = \{e \in \mathbb{R}^2 \mid V(e) \leq \alpha_1/\alpha_0\}$ . Вне  $D$  известно, что  $\dot{V}(e(t)) < 0$ , то есть  $V$  убывает и попадает в  $D$ , но покинуть  $D$  уже не сможет.

**Утверждение 2.** *Траектория системы (15) с непрерывным управлением и возмущением однажды попадает в область  $D$  и больше не покидает ее.*

## 4.2. Оценка решения системы Дуффинга с дискретным управлением

Рассматривая поведение системы Дуффинга с дискретным управлением, нам хотелось бы получить результат, аналогичный полученному в предыдущей части работы. Постараемся найти некую область, для в которую будет безвозвратно попадать траектория дискретно управляемой системы.

Возьмем некое малое  $\delta > 0$ .

$$V(e(t)) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \delta. \quad (20)$$

Из него также следует неравенство (18):  $\dot{V}(e(t)) \leq -\alpha_0 V(e(t)) + \alpha_1$ .

Рассмотрим систему (16) в нулевой момент времени. Так как  $e_1(0)$  и  $e_2(0)$  конечны, существует некоторое  $\zeta$  такое, что  $V(e(0)) < \zeta$ . Обозначим  $D_0 = \{e \in \mathbb{R}^2 \mid V(e) \leq \zeta + \delta\}$ . Также обозначим  $M_1 = \max_{D_0} \dot{V}(e)$  и  $M_2 = \max_{D_0} \ddot{V}(e)$ .

**Теорема 2.** Для любого положительного  $\delta$  такого, что

$$\delta > \Delta t_k \min \left\{ \Delta t_k + M_1, \frac{1}{2\alpha_0 M_2} \right\}$$

существует  $\Delta t_k$  такое, что (16) попадет в область

$$D_\delta = \left\{ e \in \mathbb{R}^2 \mid V(e) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \delta \right\}$$

и не покинет ее.

*Доказательство.* Положим, что  $e(t_k) \notin D_\delta$ , то есть  $V(e(t_k)) > \alpha_1/\alpha_0 + \delta$  и  $\dot{V}(e(t_k)) < 0$ .

Чтобы показать, что траектория (16) попадет в  $D_\delta$  и не покинет его, докажем что

$$V(e(t)) - V(e(t_k)) < 0, \quad (21)$$

где  $t_k < t \leq t_{k+1}$ .

Рассмотрим разложение  $V(e(t))$ :

$$V(e(t)) = V(e(t_k)) + \Delta t_k \dot{V}(e(t_k)) + \frac{1}{2} \Delta t_k^2 \ddot{V}(e(\bar{t})),$$

где  $\bar{t}$  — точка из промежутка  $(t_k, t)$ .

Теперь покажем, что

$$\Delta t_k \dot{V}(e(t_k)) + \frac{1}{2} \Delta t_k^2 \ddot{V}(e(\bar{t})) < 0, \quad (22)$$

чтобы выполнялось (21).

Рассмотрим начальный момент времени  $t = 0$ . В этой точке  $e_1(0)$  и  $e_2(0)$  будут принимать некоторые конечные значения, а значит существует  $\zeta_0 > 0$  такое, что  $\|e(0)\| < \zeta_0$ . Тогда из (17) существует  $\zeta$  такое, что

$$V(e(0)) < \zeta. \quad (23)$$

Аналогично получаем, что существует  $\tilde{\zeta}_1$ :

$$\ddot{V}(e(0)) < \tilde{\zeta}_1.$$

Тогда по определению непрерывности существует конечное  $\zeta_1$  такое, что

$$\ddot{V}(e(\bar{t})) < \zeta_1.$$

Получается, что

$$\Delta t_k \dot{V}(e(t_k)) + \frac{1}{2} \Delta t_k^2 \ddot{V}(e(\bar{t})) < -\Delta t_k \left( -\delta \alpha_0 + \frac{1}{2} \Delta t_k \zeta_1 \right).$$

Так как  $\alpha_0$  и  $\zeta_1$  конечные, найдется  $\Delta t_k$  такое, что

$$\frac{1}{2} \Delta t_k \zeta_2 - \delta \alpha_0 < 0. \quad (24)$$

Тогда для  $t_0$  и  $t$  такого, что  $t_0 < t \leq t_1$ , будет выполнено неравенство (22). То есть

$$V(e(t)) - V(e(t_0)) < 0.$$

Из (23) следует, что

$$V(e(t_1)) < V(e(t_0)) < \zeta.$$

Обозначим  $\zeta_2 = \zeta$ . Тогда

$$V(e(t_1)) < \zeta_2,$$

и существует  $\zeta_0^1$ :  $\|e(t_1)\| < \zeta_0^1$ .

Докажем утверждение (22) еще раз, но для момента времени  $t_1$ . Аналогично для  $t_2, t_3, \dots$ . Получается, что для любого  $k > 0$  и  $t_k < t \leq t_{k+1}$

$$V(e(t)) < \zeta, \quad (25)$$

$$V(e(t)) - V(e(t_k)) < 0. \quad (26)$$

Покажем, что  $e(t) \in D_0$  для  $t_k < t \leq t_{k+1}$ . Так как положили, что  $e(t_k) \notin D_\delta$ . Тогда из (25) следует, что  $V(e(t_k)) < \zeta$ , а значит по определению  $D_0$  верно, что  $e(t_k) \in D_0$ .

Пусть теперь  $e(t_k) \in D_\delta$ . Тогда потребуем, чтобы

$$V(e(t)) - V(e(t_k)) < \delta. \quad (27)$$

Аналогично проведению доказательства (26) хотим показать, что

$$\Delta t_k \dot{V}(e(t_k)) + \frac{1}{2} \Delta t_k^2 \ddot{V}(e(\bar{t})) < \delta.$$

Обозначим за  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  величины такие, что

$$\dot{V}(e(t_k)) < \gamma_1,$$

$$\ddot{V}(e(t_k)) < \gamma_2.$$

$\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будем рассматривать положительными, так как при отрицательных значениях сразу выполнится более сильное неравенство (26).

$$\Delta t_k \gamma_1 + \frac{1}{2} \Delta t_k^2 \gamma_2 < \delta.$$

При  $\delta > \Delta t_k (\gamma_1 + \frac{1}{2} \Delta t_k \gamma_2)$  выполняется (27), если  $e(t_k) \in D_\delta$ .

Значит, если обозначить

$$M_1 = \max_{D_0} \dot{V}(e),$$

$$M_2 = \max_{D_0} \ddot{V}(e),$$

то по (24) если  $\delta$  удовлетворяет условию

$$\delta > \Delta t_k \min \left\{ \Delta t_k + M_1, \frac{1}{2\alpha_0 M_2} \right\},$$

то для  $t_k < t \leq t_{k+1}$  вне  $D_\delta$  выполняется  $V(e(t)) - V(e(t_k)) < 0$ , а значит вне  $D_\delta$  функция Ляпунова  $V(e)$  убывает на каждом шаге для системы

с дискретным управлением (16). □

**Следствие 1.** Пусть для шага дискретизации  $\Delta t_k$  выполнено условие

$$\Delta t_k < \min \left\{ \frac{\sqrt{M_2^2 + M_1^2 \delta} - M_2}{M_1}, \frac{2\alpha_0 \delta}{M_2} \right\},$$

тогда траектория системы ошибки (16) навсегда попадет в множество  $D_\delta$ , и ее предельное поведение будет сколь угодно близким к предельному поведению (15).

В данном разделе была дана оценка решения системы (4) с непрерывным управлением и возмущением. На основе этого утверждения и результата из [1] показали, что проблема синхронизации системы Дuffинга и эталонной модели может быть решена посредством дискретного варианта предложенного в [1] управления, так как разница между оценкой решения системы (4) с непрерывным управлением и этой же системы с дискретным управлением представляет собой некое  $\delta$ . Это  $\delta$ , а также и размер области  $D_\delta$  зависят от выбираемых параметров  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\Delta t_k$ . То есть выбирая соответствующим образом данные параметры, можно регулировать размер того множества, в котором окажется (4) с дискретным управлением.

## 5. Результаты моделирования

С помощью пакета MATLAB смоделируем эталонную систему, систему Дуффинга с непрерывным и дискретным управлениями, а также ошибки при их синхронизации с эталонной. Будем рассматривать для моделирования такие параметры системы:  $K = 4$ ,  $p = 0.4$ ,  $p_1 = -1.1$ ,  $\omega = 1.8$ ,  $q = 1.8$ ,  $q_m = 2.1$ , время  $T = 1000$ . Начальные условия  $x_1(0) = x_{1m}(0) = x_{2m}(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 2$ . Возмущение опускается.

График эталонной модели (3):

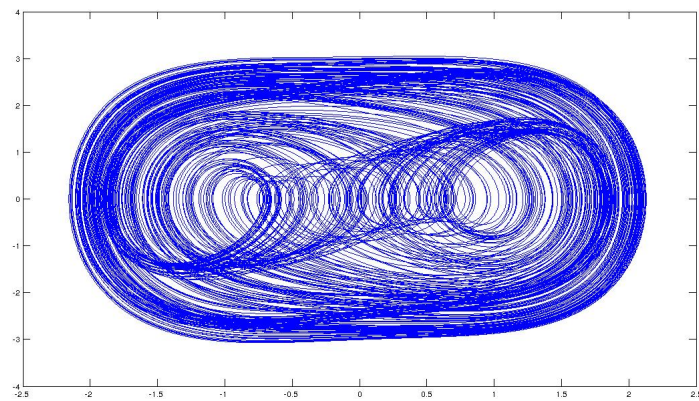


Рис. 1: Эталонная модель

### 5.1. Моделирование системы Дуффинга с непрерывным управлением

Рассмотрим систему Дуффинга под действием управления

$$u(t) = -Ke_1(t) + 3x_1(t)x_{1m}(t)e_1(t) + (q_m - q)\cos(\omega t).$$

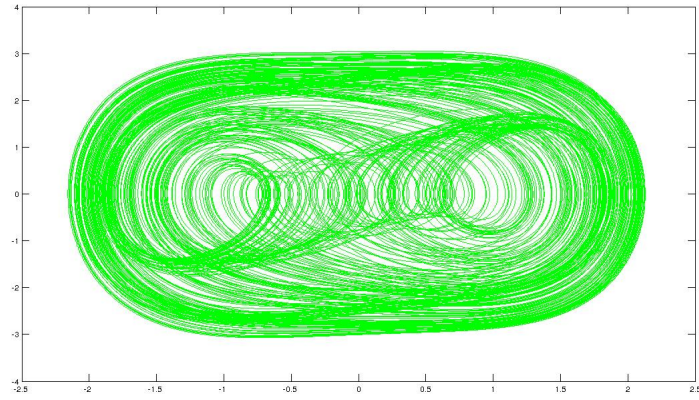


Рис. 2: Система Дуффинга с непрерывным управлением

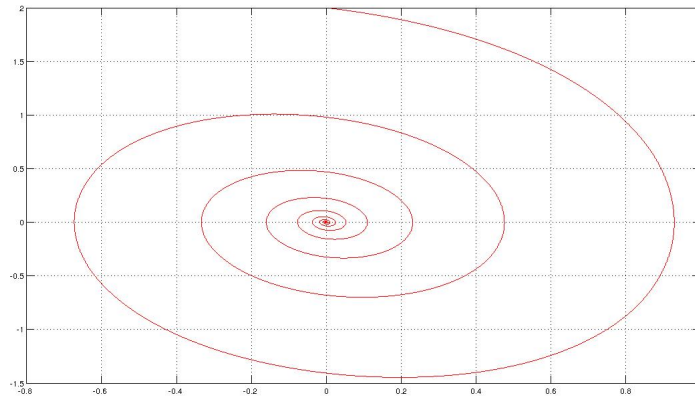


Рис. 3: Уравнение ошибки для системы с непрерывным управлением

Можно увидеть, что непрерывное управление обеспечивает достижение цели управления, то есть приводит к синхронизации двух систем.

## 5.2. Моделирование системы Дуффинга с дискретным управлением

В качестве управления  $u$  рассматривается

$$u(t) = -K e_1(t_k) + 3x_1(t_k)x_{1m}(t_k)e_1(t_k) + (q_m - q) \cos(\omega t_k), \quad (28)$$



где  $k$ -номер шага,  $h$ -шаг и  $t_k \leq t < t_{k+1}$ .

Рассмотрим сперва график управления (28) в зависимости от времени при шаге  $h = 0.01$ :

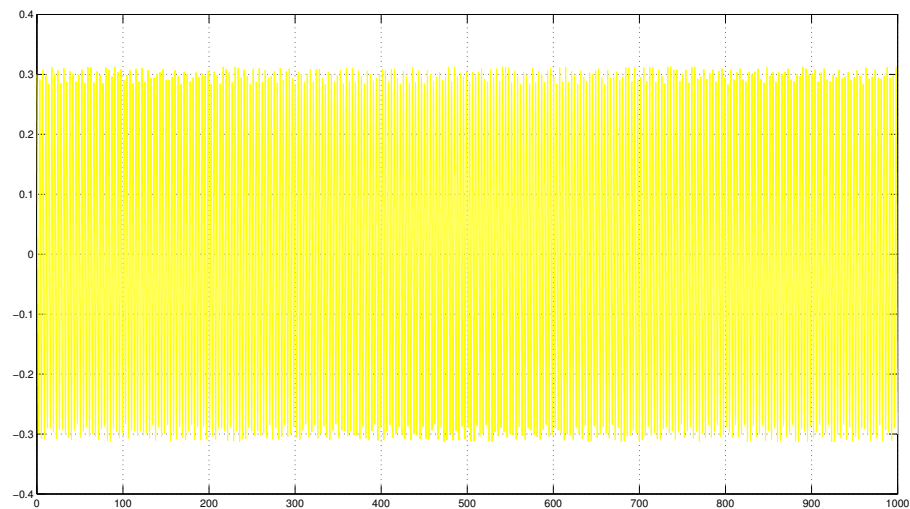


Рис. 4: Дискретное управление (28) с шагом 0.01

Он получился ступенчатым:

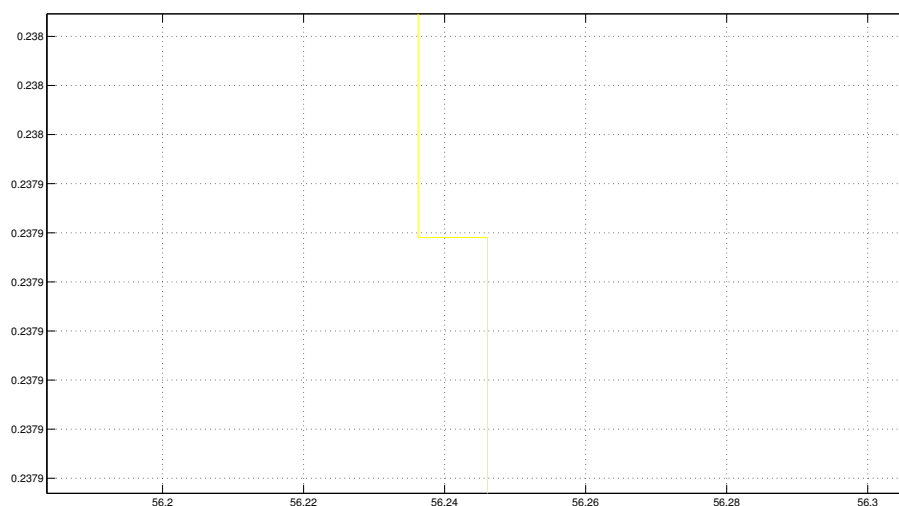


Рис. 5: Шаг дискретного управления (28)

Теперь перейдем к моделированию системы Дuffинга с дискретным управлением и разными шагами дискретизации  $h$ :

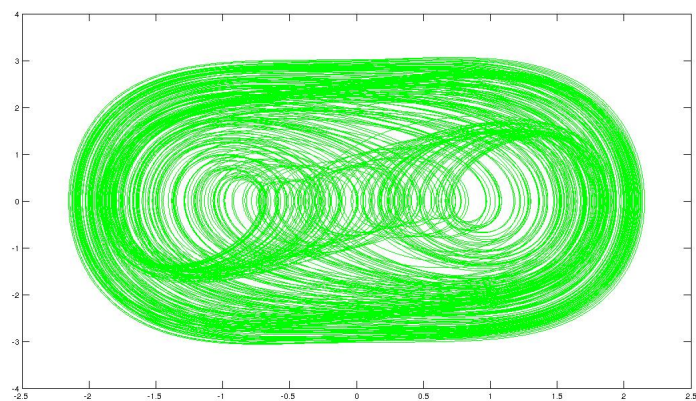


Рис. 6: Система Дуффинга с дискретным управлением с шагом 0.001

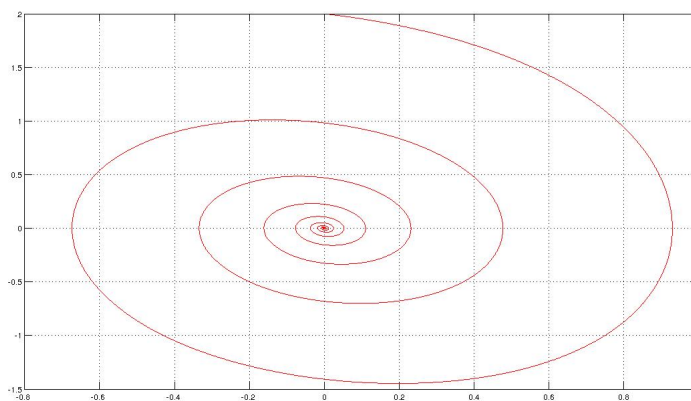


Рис. 7: Уравнение ошибки для дискретного управления с шагом 0.001

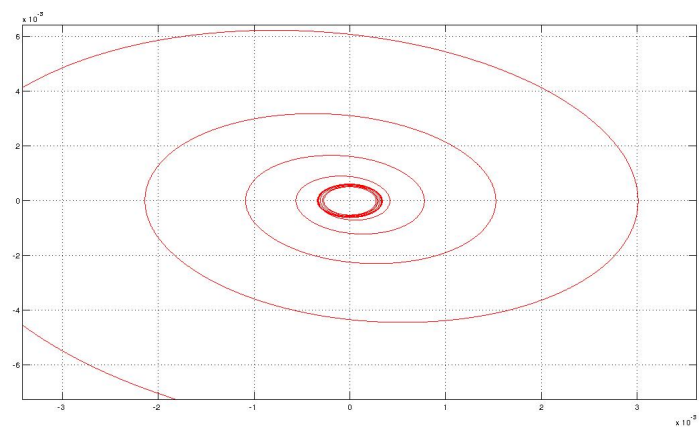


Рис. 8: Увеличенный график уравнения ошибки для дискретного управления с шагом 0.001

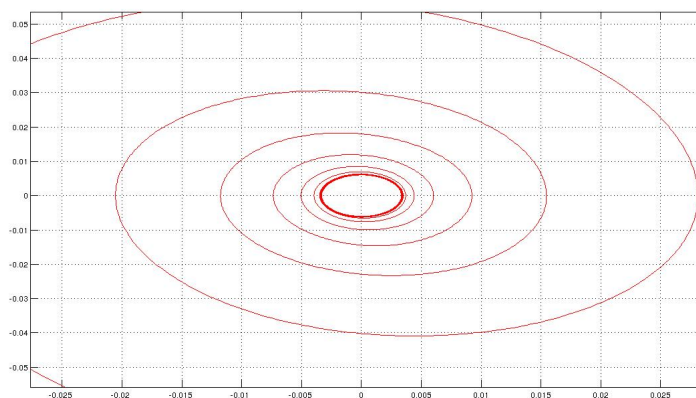


Рис. 9: Увеличенный график уравнения ошибки для дискретного управления с шагом 0.01

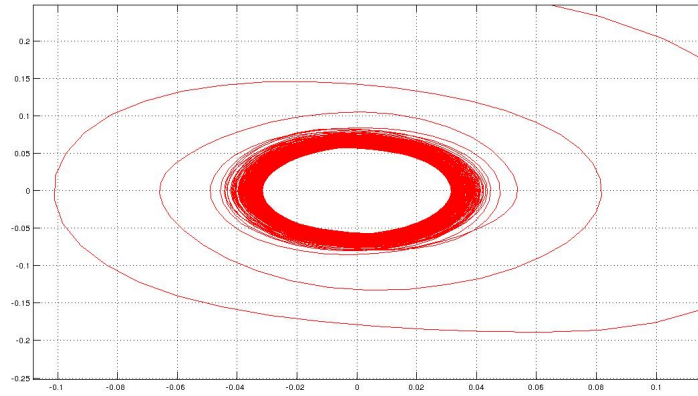


Рис. 10: Увеличенный график уравнения ошибки для дискретного управления с шагом 0.1

На графиках видно, что предельное поведение траекторий уравнения ошибки для дискретного управления зависит от шага дискретизации, и чем он больше, тем большим остается значение ошибки.

Таким образом моделирование подтверждает теоретический результат. Дискретное управление системой Дуффинга, как и непрерывное, решает поставленную задачу синхронизации. При этом выбор шага дискретизации влияет на итоговую ошибку.

## Заключение

В работе рассмотрена задача исследования дискретного адаптивного управления в проблеме синхронизации уравнения Дуффинга. Подход к этой проблеме основан на решении вспомогательной задачи непрерывного адаптивного управления. Используется функция Ляпунова, построенная для системы с непрерывным адаптивным управлением. Оценивается изменение поведения системы при дискретизации алгоритма управления.

Была получена оценка предельного поведения функции Ляпунова для системы с непрерывным управлением и возмущением. Также получено, что предельное поведение функции Ляпунова для системы с дискретным управлением приближается к предельному поведению функции Ляпунова для системы с непрерывным управлением, если шаг дискретизации достаточно мал. Этот результат проиллюстрирован с помощью моделирования траекторий указанных систем в MATLAB.

# Приложение

## Моделирование системы Дуффинга с различными видами управления в MATLAB

Моделирование эталонной системы, системы Дуффинга с непрерывным управлением и их разности

```
global p p1 w q q_m K l x t_d;
% Parameters
p = 0.4;
p1 = -1.1;
w = 1.8;
q = 1.8;
q_m = 2.1;
K = 4;
% Final time
TFinal = 1000;
% Integration step for ode45
h = 0.001;
% Initial conditions
IC = [0 0 0 2];
TSpanN = 0: h: TFinal;
l = 0;
% Integrating:
[t_d x] = ode45('duffing_continuous', TSpanN, IC);
x_sub1 = x(:,3) - x(:,1);
x_sub2 = x(:,4) - x(:,2);
% Plots
figure()
plot(x(:,1), x(:,2));
figure()
plot(x(:,3), x(:,4), 'g');
figure()
```

```

plot(x_sub1, x_sub2, 'r');
grid on

function x_common = duffing_continuous(t, x)
global p p1 w q_m q K;
x_common(1) = x(2);
x_common(2) = -p1 * x(1) - x(1)^3 - p * x(2) + ...
    q_m * cos(w * t);
e = x(3) - x(1);
% Control
u = -K * e + 3 * x(3) * x(1) * e + (q_m - q) * ...
    cos(w * t);
x_common(3) = x(4);
x_common(4) = -p1 * x(3) - x(3)^3 - p * x(4) + ...
    q * cos(w * t) + u;
x_common = x_common.';
end

```

**Моделирование эталонной системы, системы Дуффинга с дискретным управлением и их разности**

```

function duffing_discrete(TInterval)
% TInterval is sampling interval
global p p1 w q q_m K T1 IC IC1;
% Parameters
p = 0.4;
p1 = -1.1;
w = 1.8;
q = 1.8;
q_m = 2.1;
K = 4;
% Parameters for ode45
TFinal = 1000;
T1 = 0;
T2 = TInterval;

```

```

TimeStep = TInterval/10;
TSpan = T1 : TimeStep : T2;
IC = [0 0];
IC1 = [0 2];
n = 0; % initial step number
% main loop
while (T2 <= TFinal)
    % Step number
    n = n + 1;
    % Integrating systems
    % Reference system
    [t x] = ode45('duffing', TSpan, IC);
    % Controlled Duffing system
    [t_u x_u] = ode45('duffing_u', TSpan, IC1);
    % Updating integration time
    T1 = T1 + TInterval;
    T2 = T2 + TInterval;
    TSpan = T1 : TimeStep: T2;
    [rx ~] = size(x);
    [rx_u ~] = size(x_u);
    % Changing initial conditions
    IC = [x(rx, 1) x(rx, 2)];
    IC1 = [x_u(rx_u, 1) x_u(rx_u, 2)];
    % Plot vectors
    x_plot(n, :) = x(rx, :);
    x_u_plot(n, :) = x_u(rx_u, :);
    % error plot
    x_sub_plot(n, :) = x_u_plot(n, :) - x_plot(n, :);
end;
x_sub_plot(1, :)
% Drawing plots
figure()
plot(x_plot(:,1), x_plot(:,2));

```



```

figure()
plot(x_u_plot(:,1), x_u_plot(:,2), 'g');
figure()
plot(x_sub_plot(:,1), x_sub_plot(:,2), 'r');
grid on
end

function x_dot_m = duffing(t_k, x_m)
global p p1 w q_m;
x_dot_m(1) = x_m(2);
x_dot_m(2) = -p1 * x_m(1) - x_m(1)^3 - p * x_m(2) + ...
    q_m * cos(w * t_k);
x_dot_m = x_dot_m.';
end

function x_dot = duffing_u(t, x)
global p p1 w q_m q K T1 IC IC1;
% T1 - beginnig of the time period
% IC - initial conditions for system in duffing.m
% at the T1 moment
% IC1 - initial conditions for this system
% at the T1 moment
e(1) = IC1(1) - IC(1);
u = -K * e(1) + 3 * IC1(1) * IC(1) * e(1) + ...
    (q_m - q) * cos(w * T1);
x_dot(1) = x(2);
x_dot(2) = -p1 * x(1) - x(1)^3 - p * x(2) + ...
    q * cos(w * t) + u;
x_dot = x_dot.';
end

```

## Список литературы

- [1] Alexander L. Fradkov Alexander Yu. Pogromsky. Speed Gradient Control of Chaotic Continuous-Time Systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications. — 1996. — Т. 3, № 11. — С. 907–913.
- [2] Duffing G. Forced oscillations with variable natural frequency and their technical significance. — Vieweg & Sohn, 1918.
- [3] G. Chen X. Dong. On feedback control of chaotic continuous-time systems // IEEE Trans. Circuits Syst. — 1993. — Vol. 40. — P. 591–601.
- [4] Holmes P. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1979. — Vol. 292, no. 1394. — P. 419–448.
- [5] Ivana Kovacic Michael J Brennan. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. — John Wiley & Sons, 2011.
- [6] Stoker J. J. Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. — Interscience Publishers, 1950.
- [7] Ueda Y. Random phenomena resulting from non-linearity in the system described by Duffing's equation // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 1985. — Vol. 20. — P. 481–491.
- [8] Фрадков А. Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 9. — С. 90–101.
- [9] Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспорисковые методы. — М. : Наука, 1990.